

Практическое занятие №6

Моделирование физических процессов в SciLab

Варианты заданий: ваш порядковый номер в журнале.

Результат представить в отчете. Обязательно наличие программного кода и графиков.

На железной дороге особое внимание уделяется безопасности движения. Для этого нужно знать условия разгона и торможения поезда. Рассмотрим движение рудничных поездов и электровозов. Для них характерны небольшие скорости, поэтому движение можно исследовать с помощью достаточно простых дифференциальных уравнений. Сопротивление движению поезда определяется зависимостью от скорости и веса поезда. Решение дифференциального уравнения первого порядка определяет изменение скорости.

Пусть поезд движется со скоростью V . Сопротивление движению поезда R зависит от веса поезда Q и определяется эмпирической формулой:

$$R = (a + bV)Q. \quad (1)$$

Запишем уравнение равновесия для движения поезда, используя силу его инерции I , сопротивление движению R и силу тяги электровоза F : $I + R = F$.

Обозначим $S(t)$ - путь, пройденный поезда за время t . Тогда $V = S'(t)$ - скорость движения, $V' = S''(t)$ - ускорение движения. Сила инерции I зависит от массы m поезда и ускорения движения.

$$I = mV'(t). \quad (2)$$

Вес поезда $Q = mg$ равен произведению его массы m на гравитационную постоянную $g=9.8$ м/с². В результате уравнение равновесия примет вид

$$mV'(t) + (a + bV)mg = F. \quad (3)$$

Для решения этого дифференциального уравнения выполним алгебраические преобразования:

$$V'(t) + (a + bV)g = F/m, V'(t) = F/m - (a + bV)g, \quad (4)$$

$$V'(t) = F/m - ag - bVg, \quad (5)$$

$$V'(t) = bg\left(\frac{F/m - ag}{bg} - V\right) = bg\left(\frac{F - aQ}{bQ} - V\right), \quad (6)$$

$$V' = (A - V)bg, A = \frac{F - aQ}{bQ}. \quad (7)$$

Запишем производную скорости через отношение дифференциалов и разделим переменные V и t ю

$$\frac{dV}{dt} = bg(A - V), \frac{dV}{A - V} = bgdt. \quad (8)$$

Находим общее решение дифференциального уравнения, записывая произвольную константу в виде $\ln C$:

$$-\ln|A - V| = bgt + \ln C. \quad (9)$$

Постоянную C определяем из начального условия $V(0) = 0$, то есть в начальный момент времени $t=0$ поезд не двигался и его скорость равнялась нулю. Следовательно,

$$-\ln A = \ln C, C = \frac{1}{A}. \quad (10)$$

Найдем зависимость между временем t и набранной за это время скоростью V движения поезда.

$$\ln A - \ln|A - V| = bgt, t = \frac{1}{bg} \cdot \ln \frac{A}{A - V}. \quad (11)$$

Перейдя к определению расстояния, на котором поезд достигнет разгона заданной скорости. Воспользуемся свойствами дифференциала, чтобы найти зависимость между скоростью $V(t)$ и пройденным расстоянием $S(t)$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot V. \quad (12)$$

В результате преобразований дифференциальное уравнение движения поезда примет вид

$$\frac{dV}{dS} V = bg(A - V). \quad (13)$$

Разделим переменные v и S и проинтегрируем обе части равенства:

$$\frac{V}{A-V}dV = bgdS, \frac{V-A+A}{A-V}dV = bgdS, \quad (14)$$

$$\int(-1 + \frac{A}{A-V})dV = bg \int dS, -V - A \cdot \ln|A-V| + C = bgS. \quad (15)$$

Получив общее решение, постоянную C определим из начального условия задачи. Вначале скорость была равна нулю, поезд не двигался, и пройденное им расстояние было равно нулю. Поэтому, если $V=0$, то $S=0$. Следовательно, $C = A \ln A$.

В результате получим зависимость пройденного поездом расстояния $S(t)$ от скорости движения $V(t)$.

$$s(V) = \frac{1}{bg}(-V + A \cdot \ln \frac{A}{A-V}). \quad (16)$$

Пример. При движении рудничного поезда его сопротивление движению R примет вид:

$$R = (2.5 + 0.05V)Q. \quad (17)$$

Вес поезда измеряется в тоннах, а скорость - в м/с. Вес поезда с элетровозом $Q=40$ т, сила тяги электровоза $F=200$ кг.

Найдем через сколько времени и на каком расстоянии рудничный поезд приобретает на горизонтальном участке пути скорость $V=12$ км/ч.

Используя числовые данные задачи, вычислим параметр A :

$$A = \frac{F - aQ}{bQ} = \frac{200 - 2.5 \cdot 40}{0.05 \cdot 40} = 50. \quad (18)$$

Вычислим время достижения поездом скорости $V=12$ км/ч, записав значение скорости в м/с (**делать пересчет в SciLab!!! Следить за тем, в каких единицах измерения вы проводите расчет!**). В результате $t=141$ с.

Таким образом, скорость 12 км/ч будет достигнута поездом через 2 мин 21 с. Путь, пройденный поездом составит к этому времени $S=237$ м.

Задача. Рассмотрим задачу влияния скорости на движение поезда, если вес поезда Q и тяга поезда F изменяется в некотором диапазоне.

Исходные данные: $a=2.5$, $b=0.05$, $V=2, \dots, 18$ км/ч, Q и F по вариантам.

1) Построить графики зависимости $t(V, Q, F)$ и $S(V, Q, F)$ для трех значений Q при заданном F и меняющемся V .

2) Построить графики зависимости $t(V, Q, F)$ и $S(V, Q, F)$ для трех значений F при заданном Q и меняющемся V .

Таблица 1: Варианты к заданию.

Вариант	Q , м	F , кг
1	10, 15, 20	100, 200, 300
2	20, 25, 30	120, 150, 190
3	20, 25, 50	200, 250, 300
4	30, 40, 50	100, 300, 350
5	20, 40, 50	100, 200, 250
6	30, 40, 50	100, 150, 200
7	10, 40, 50	150, 250, 350
8	15, 35, 40	100, 120, 140
9	15, 35, 45	200, 250, 400
10	20, 50, 60	100, 300, 500
11	30, 50, 60	100, 300, 400
12	40, 50, 60	100, 220, 290
13	20, 50, 70	120, 340, 410
14	10, 30, 70	100, 200, 300
15	40, 45, 50	150, 350, 400
16	20, 45, 65	250, 270, 290

Литература

Задания были адаптированы из
 Математическое моделирование в решении прикладных задач: сб. науч. тр. /
 [под науч. ред. Г.А. Тимофеевой, д-ра физ.-мат. наук и О.В. Куликовой,
 канд. пед. наук]. - Екатеринбург: УрГУПС, 2015. - Вып. 3 (208). - 87 с.