Лекция 2. Закон Гука и константы упругих свойств

Система принятых обозначений:
E - модуль Юнга, Па;
G - модуль сдвига, Па;
K - объемный модуль упругости, Па;
ν - коэффициент Пуассона;
c_{ij} - модули упругости, Па;
s_{ij} - коэффициенты упругости, Па$^{-1}$;

Закон Гука

В процессе механического испытания образец может подвергаться упругой и пластической деформации с последующим разрушением.

Стадию упругой деформации образцы проходят при всех без исключения видах механических испытаний. Поведение металлов при упругой деформации с достаточно хорошим приближением описывается законом Гука, который определяет прямую пропорциональность между напряжением и упругой деформацией.

На рис. 1 показаны начальные (упругие) участки кривых напряжение-деформация при одноосном растяжении, кручении (сдвиге) и гидростатическом сжатии. Наклон каждой из трех кривых, т. е. коэффициент пропорциональности, связывающий напряжение и деформацию, характеризует **модуль упругости**. Отсюда можно дать определение **закона Гука**, которые были выведены в 1678 году английским учёным Робертом Гуком.

Закон Гука — закон, согласно которому деформация, возникающая в упругом теле, пропорциональна приложенной к этому телу силе.
Три закономерности:
1. Увеличение длины образца (при растяжении) прямо пропорционально нагрузке при постоянных исходных

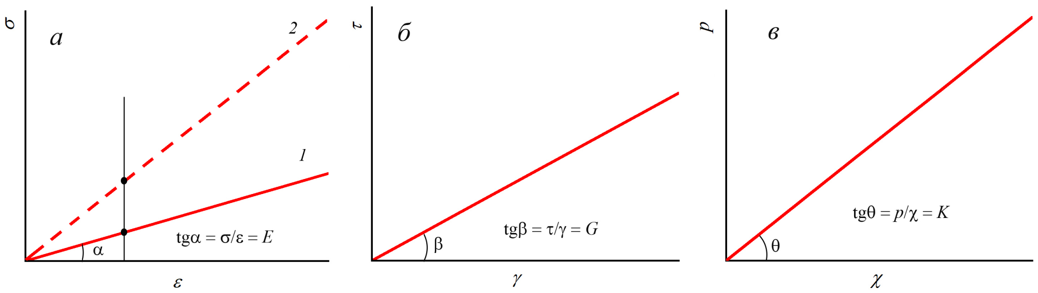

Рис. 1. Упругие участки кривых напряжение-деформация при одноосном растяжении (а), кручении (б) и гидростатическом сжатии (в).

длине и сечении.
2. Увеличение длины прямо пропорционально первоначальной длине образца при постоянной нагрузке и сечении.
3. Увеличение длины обратно пропорционально сечению образца при постоянной нагрузке и исходной длине.

Закон Гука выполняется только при малых деформациях. При превышении предела пропорциональности связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях. Математически закон Гука в упрощенном виде можно определить следующими выражениями. Модуль E, определяемый при растяжении, называется **модулем Юнга**

$$E = \sigma/\varepsilon. \tag{1}$$

Модуль G, определяемый при кручении (сдвиге), называется **модулем сдвига** (модулем касательной упругости).

$$G = \tau/\gamma. \tag{2}$$

Модуль K, определяемый при гидростатической нагрузке, называется **объемным модулем упругости**

$$K = p/\chi, \tag{3}$$

где p - гидростатическое давление, χ - относительное уменьшение объема.

Модули упругости определяют жесткость материала, т.е. интенсивность увеличения напряжения по мере упругой деформации.

Механизм упругой деформации металлов состоит в обратимых смещениях атомов из положения равновесия в кристаллической решетке. Чем больше величина смещения каждого атома, тем больше упругая макродеформация всего образца.

Величина этой упругой деформации в металлах не может быть большой (относительное удлинение в упругой области обычно меньше 0.1 %), так так атомы в кристаллической решетке способны упруго смещаться лишь на небольшую долю межатомного расстояния.

Физический смысл модулей упругости состоит в том, что они характеризуют сопротивляемость металлов упругой деформации, т.е. смещению атомов из положений равновесия в решетке.

Если сравнивать два металла с разными E (рис. 1а, прямые 1 и 2), то для одинакового смещения атомов (равной упругой деформации) при бОльшем E потребуется бОльшее напряжение (прямая 2).

Выражения (10)-(11) определяют связь между напряжениями и деформациями в одном и том же направлении. Однако деформация може не совпадать по направлению с напряжением. Например, при одноосном растяжении возникает трехосная деформация. Тогда описанный элементарный закон Гука должен быть заменен обобщенным, который устанавливает линейную связь между напряжениями и деформациями в любых направлениях, т.е. между всеми компонентами тензора напряжений и деформаций.

В общем виде закон Гука для изотропных тел записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz};\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz};\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy};\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G};\\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G};\\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}.
\end{aligned}\right\}$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона при одноосном растяжении (сжатии), характеризующий отношения поперечной относительной деформации к продольной. Это четвертая важнейшая константа упругих свойств после модулей упругости.

Связь между модулями упругости

Соотношение между модулем объемной упругости K, модулем нормальной упругости E, модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν для изотропных тел приведено в таблице 1.

Известные величины	K	E	G	ν
K, E	-	-	$\frac{3KE}{(9K-E)}$	$\frac{1}{2}-\frac{E}{6K}$
K, G	-	$\frac{9KG}{(3K+G)}$	-	$\frac{1}{2}\frac{3K-2G}{3K+2G}$
K, ν	-	$3K(1-2\nu)$	$\frac{3}{2}K\frac{1-2\nu}{1+\nu}$ -	
E, G	$\frac{E}{3(3G-E)}$	-	-	$\frac{E}{2G}-1$
E, ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	-	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	-
G, ν	$\frac{3}{2}G\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}$	-	-	-

Коэффициенты и модули упругости

Приведенная выше форма записи закона Гука справедлива лишь для изотропных тел, в которых любые произвольно выбранные направления эквивалентны. Картина значительно усложняется вследствие анизотропии монокристалла. В общем случае анизотропного тела закон Гука устанавливает прямую пропорциональность между каждым компонентом тензора деформаций и всеми шестью компонентами тензора напряжений

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{xz};\\
\sigma_{yy} &= c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{yz} + c_{26}\gamma_{xz};\\
\sigma_{zz} &= c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{32}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{yz} + c_{36}\gamma_{xz};\\
\tau_{xy} &= c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{yz} + c_{46}\gamma_{xz};\\
\tau_{yz} &= c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{yz} + c_{56}\gamma_{xz};\\
\tau_{zx} &= c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{yz} + c_{66}\gamma_{xz}.
\end{aligned}\right\}$$

Коэффициенты пропорциональности в этих уравнения c_{ij} являются **модулями** упругости (модулями жесткости) анизотропного тела.

Компоненты тензора деформаций также являются линейными функциями компонент тензора напряжений, что может быть выражено аналогичной системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} + s_{14}\tau_{xy} + s_{15}\tau_{yz} + s_{16}\tau_{xz};\\
\varepsilon_{yy} &= s_{21}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + s_{23}\sigma_{zz} + s_{24}\tau_{xy} + s_{25}\tau_{yz} + s_{26}\tau_{xz};\\
\varepsilon_{zz} &= s_{31}\sigma_{xx} + s_{32}\sigma_{yy} + s_{33}\sigma_{zz} + s_{34}\tau_{xy} + s_{35}\tau_{yz} + s_{36}\tau_{xz};\\
\gamma_{xy} &= s_{41}\sigma_{xx} + s_{42}\sigma_{yy} + s_{43}\sigma_{zz} + s_{44}\tau_{xy} + s_{45}\tau_{yz} + s_{46}\tau_{xz};\\
\gamma_{yz} &= s_{51}\sigma_{xx} + s_{52}\sigma_{yy} + s_{53}\sigma_{zz} + s_{54}\tau_{xy} + s_{55}\tau_{yz} + s_{56}\tau_{xz};\\
\tau_{zx} &= s_{61}\sigma_{xx} + s_{62}\sigma_{yy} + s_{63}\sigma_{zz} + s_{64}\tau_{xy} + s_{65}\tau_{yz} + s_{66}\tau_{xz}.
\end{aligned}\right\}$$

Коэффициенты пропорциональности в этих уравнения c_{ij} являются **коэффициентами** упругости (коэффициентами податливости) анизотропного тела.

Коэффициенты упругости и модули упругости часто записывают в виде самостоятельной матрицы:

$$\begin{Vmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16}\\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26}\\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36}\\
c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46}\\
c_{51} & c_{52} & c_{13} & c_{54} & c_{55} & c_{56}\\
c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66}
\end{Vmatrix}$$

Не все 36 модулей упругости являются независимыми. Вследствие симметричности матрицы относительно диагонали c_{11}-c_{66} число независимых модулей сокращается до 21: $c_{12} = c_{21}$, $c_{13} = c_{31}$ и т.д.

Таким образом, для определения всех компонент тензора напряжений в общем случае анизотропного тела необходимо знать тензор деформаций и 21 модуль упругости. Для решения обратной задачи требуется знание 21 коэффициента упругости.

Коэффициенты и модули упругости для кристаллов с разной анизотропией

Самостоятельно!

Литература:

1. М.Л. Берштейн, В.А. Займовский. Механические свойства металлов. М.: "Металлургия"1979.