

Практическое занятие №7

Моделирование физических процессов в SciLab

Исследование поля напряжений краевой дислокации

Варианты заданий: ваш порядковый номер в журнале.

Результат представить в отчете. Обязательно наличие программного кода и графиков.

В данной работе будет рассмотрено поле напряжений вокруг краевой дислокации. Прямая краевая дислокация создает плоское деформированное состояние (плоскую деформацию), определяемое условиями $u_z=0$, $\frac{\partial u_i}{\partial z}=0$ (см. рис. 1). Дифференциальное уравнение для функции напряжений Эри в полярных координатах принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \psi = 0. \quad (1)$$

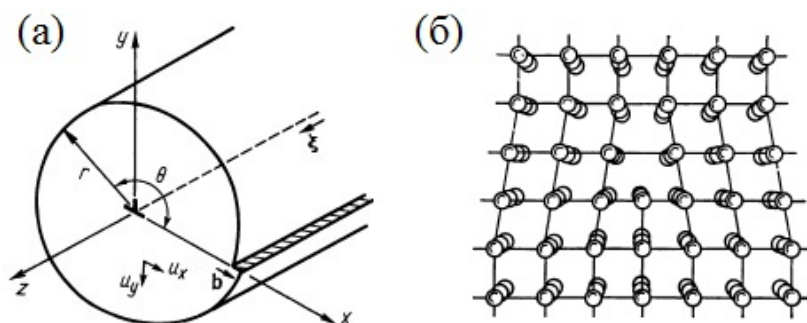


Рис. 1: (а) Краевая дислокация. Показаны смещения при плоской деформации. (б) Модель краевой дислокации в простом кубическом кристалле.

Коротко рассмотрим получение общего решения уравнения 1, а затем применим это решение к частному случаю краевой дислокации в бесконечном твердом теле.

Для функции

$$\varphi = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nabla^2 \psi \quad (2)$$

уравнение 1 принимает форму уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = 0. \quad (3)$$

Переменные в этом гармоническом уравнении разделяются, поэтому решение имеет вид

$$\varphi = \sum_n R_n(r) \varphi_n(\theta), \quad (4)$$

в каждом слагаемом которого переменные разделены. С учетом требования, что это решение должно быть однозначным в плоскости скольжения, выражение 4 принимает форму

$$\varphi = (\alpha_0 + \beta_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \cos n\theta. \quad (5)$$

На основе качественного анализа рис. 1 можно заключить, что функция $\varphi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ должна иметь максимум при $\theta = -\pi/2$ и минимум при $\theta = \pi/2$ и что с возрастанием r величина ее должна убывать. Простейший член из 5, ведущий себя подобным образом, выглядит так:

$$\varphi_{cr} = \beta_1 r^{-1} \sin \theta. \quad (6)$$

Последующие рассуждения показывают, что это - единственное слагаемое, характеризующее поле дальнего действия дислокации.

Слагаемые типа r^n соответствуют различным условиям наложения поверхностных сил извне. Логарифмический член учитывает постоянное касательное напряжение на внешней поверхности полубесконечного тела и не имеет отношения к дислокационной задаче. Члены вида r^{-n} при $n \geq 2$ соответствуют различным линейным особенностям недислокационной природы.

Можно, например, показать, что члены, содержащие r^{-2} , описывают линейный источник расширения. Вещество в ядре дислокации может стремиться к расширению в результате ангармонизма и особенностей структуры, которые в некоторых случаях могут существовать в ядре. Поэтому возможны члены вида r^{-n} , $n \geq 2$. Но эти члены определяются свойствами ядра и близлежащей области и не влияют на общие характеристики дислокации. Вклад их быстро убывает по мере удаления от дислокации и на больших расстояниях от ядра основной вклад вносит слагаемое типа 6.

Следовательно, поле напряжений, характерное для краевой дислокации должно определяться из уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\psi = \beta_1 r^{-1} \sin \theta. \quad (7)$$

Частным решением его является

$$\psi_{cr} = \frac{\beta_1}{2} r \sin \theta \ln r. \quad (8)$$

Решениями однородного уравнения можно пренебречь, как это было сделано при сведении выражения 5 к 6, тем самым временно исключив члены, связанные с ядром.

Краевую дислокацию с вектором Бюргерса b можно представить как результат введения в материал полубесконечной пластины толщиной b , как это было сделано на рис. 2. Поэтому величина b должна быть равна разности общей упругой деформации выше и ниже разреза, сделанного по плоскости скольжения (см. рис. 2 д):

$$b = - \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_{xx}(x, \eta) - \varepsilon_{xx}(x, -\eta)] dx; \eta \rightarrow 0, \eta > 0. \quad (9)$$

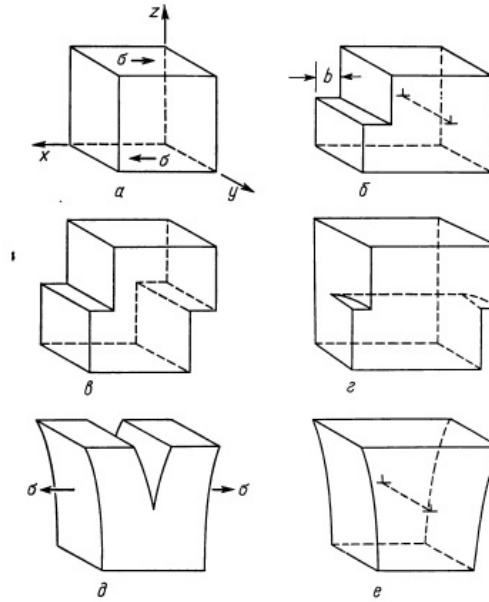


Рис. 2: Операции с идеальным кубом (а), образующие дислокации и ступени скольжения сдвигом (б - г) и растяжением (д-е).

Получая из выражения для ψ_{cr} напряжения по уравнению

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} & or & \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}; \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} & or & \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}; \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} & or & \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}; \end{aligned} \right\}$$

и затем подставляя их в уравнение

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]; \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G} \sigma_{23}; \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G} \sigma_{31}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12}. \end{aligned} \right\}$$

где E - модуль Юнга, определяем ε_{xx} , которое, в свою очередь, подставляем в уравнение 9. В результате будем иметь

$$b = \frac{-2\pi(1-\nu)}{G} \cdot \frac{\beta_1}{2}; \beta_1 = \frac{-bG}{\pi(1-\nu)}, \quad (10)$$

где G - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона.

Эти выражения не зависят от η в соответствии с критерием выбора контура Бюргера.

С учетом соотношений 10 функция напряжений 8 принимает вид

$$\psi_{cr} = -\frac{Gby}{4\pi(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2). \quad (11)$$

Дифференцированием ψ_{cr} согласно определению получаем напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}; \\ \sigma_{xy} &= \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}; \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{Gb\nu}{\pi(1-\nu)} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}; \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \right\}$$

опираясь на полученные выражения для напряжений находим смещения в виде

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left[-\arctan \frac{y}{x} + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)} \right] + C. \quad (12)$$

Константа интегрирования определяется из условия $u_x=0$ при $y=0$, что дает $C = b/4$, так что

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left[\arctan \frac{y}{x} + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)} \right]. \quad (13)$$

и аналогично

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln(x^2+y^2) + \frac{x^2-y^2}{4(1-\nu)(x^2+y^2)} \right]. \quad (14)$$

В формулу для u_y входит постоянная интегрирования $C = b/4\pi(1-\nu)$, введенная с целью получить выражение симметричное по x и y . Заметьте, что u_y содержит логарифмический член, расходящийся по r . Эту расходимость физически можно объяснить изгибом плоскостей решетки вокруг оси z , вызванным введением лишней полуплоскости, которая образует дислокацию.

Пример.

В таблице 1 приведены использованные данные. Необходимо по приведенным формулам рассчитать действующие вокруг дислокации напряжения σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} и σ_{zz} при $x=[-20:0.1:20]$ и $y=[-10:0.1:10]$.

В качестве примера рассчитаем напряжение σ_{yy} и построим распределение напряжений, как показано на рис. 3. Проанализируем график: видно, что вокруг дислокации есть области положительных и отрицательных напряжений.

В отчете должно быть представлено 4 графика, демонстрирующих распределение напряжений, создаваемых дислокацией, в области $x=[-20:0.1:20]$ и $y=[-10:0.1:10]$ при $\nu=0.35$.

Таблица 1: Используемые переменные.

Параметр	Величина
Вектор Бюргерса, b , нм	0.286
Модуль сдвига, G , ГПа	25.4
Коэффициент Пуассона, ν	0.35

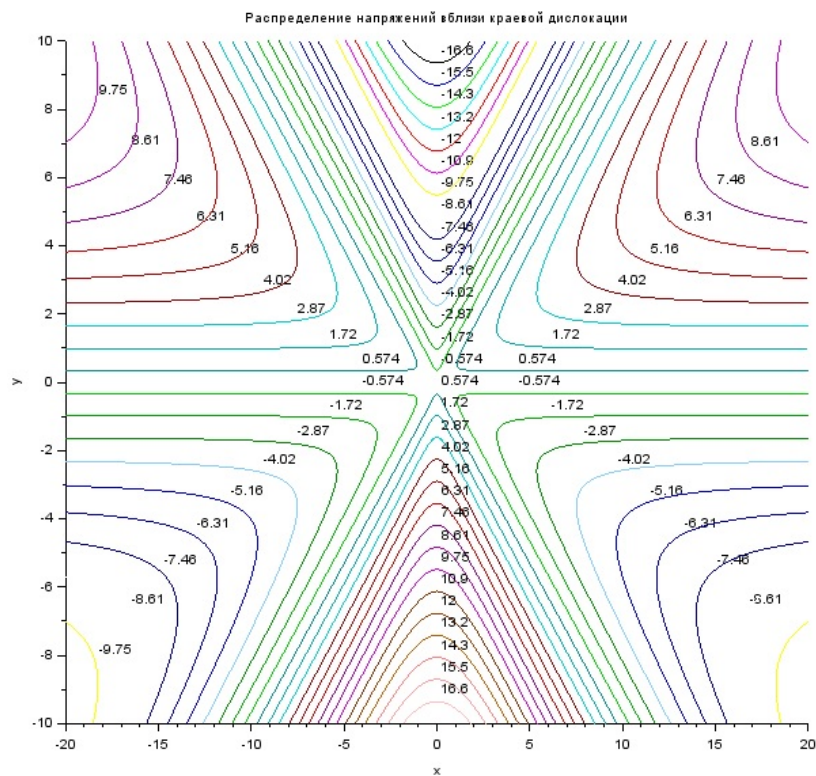


Рис. 3: Пример выполнения задания.

Литература

Текст взят из
Дж. Хирт, И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат, 1972, стр. 600.

Таблица 2: Варианты к заданию.

Вариант	b , нм	G , ГПа
1	0.3	20
2	0.35	24.5
3	0.28	22
4	0.31	31
5	0.315	33.5
6	0.286	22.7
7	0.231	22.1
8	0.265	30.1
9	0.3	23
10	0.313	27.5
11	0.216	31.1
12	0.27	33.7
13	0.283	28
14	0.317	29.5
15	0.214	34
16	0.21	20.5