

Практическое занятие №3

Моделирование физических процессов в SciLab

Варианты заданий: ваш порядковый номер в журнале.

Результат представить в отчете. Обязательно наличие программного кода и графиков.

Задание 1. Моделирование движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Рассмотрим случай движения тела, брошенного под углом к горизонту, происходящего только под действием силы тяжести (трением пренебрегаем!). В этом случае одной координаты для описания движения недостаточно. Необходимо ввести систему координат xOy , при этом ось Ox направляют горизонтально, а ось Oy – вертикально вверх или вниз. Теперь положение тела задается двумя координатами (x, y) , каждая из которых с течением времени будет изменяться. Закон изменения координат можно установить из следующих соображений.

Поскольку мы считаем, что никакие силы, кроме силы тяжести на тело не действуют, движение вдоль оси Ox будет равномерным, и абсцисса тела меняется по закону $x = v_x t$, где $v_x = v_{0x} = \text{const}$ - проекция скорости на ось Ox .

Сила тяжести, действующая на тело, сообщает ему ускорение g , направленное, как и сама сила, вертикально вниз. Поэтому проекция скорости на ось Oy будет меняться по закону $v_y = v_{0y} - g_y t$, где v_{0y} , g_y - проекция начальной скорости и ускорения свободного падения на эту ось, а ордината тела с течением времени изменяется как

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{g_y t^2}{2}. \quad (1)$$

Уравнение траектории, т.е. зависимость $y(x)$, можно найти, исключив время из последнего выражения. Выразим время через абсциссу: $t =$

x/v_{0x} и подставим в уравнение ординаты:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2}, \quad (2)$$

где знаки проекций v_{0x} , v_{0y} , g_y зависят от направления осей координат. В каждой точке траектории скорость тела направлена по касательной к ней и может быть разложена на две составляющие $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, где $\vec{v}_x = \vec{v}_{0x}$. Модуль скорости при этом $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$.

В данном задании можно проследить за взаимосвязями следующих величин: x и t , y и t , y и x , а кроме того, установить, как зависит дальность полета тела от угла, под которым его бросают, и от величины его начальной скорости.

Исходные числовые данные: $\alpha_1 = 36^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$, $v_0 = 100$ м/с, $y_0 = 0$ м, $t_0 = t_{min} = 0$ с, $t_{max} = 10$ с.

Углы заданы в градусах. Необходимо выполнить их перерасчет в радианы. Шаг по времени 0.1 с. Проекции скорости вычислим как $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. При этом, как было показано выше,

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x}, \\ v_y &= v_{0y} \pm g_y t = v_{0y} - g t, \\ x &= v_x t, \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}. \end{aligned}$$

График зависимости $y(x)$ должен быть построен в соответствии с уравнением траектории:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2. \quad (3)$$

Рассчитываем по формулам все необходимые величины и получаем графики для трех значений α , как показано на рис. 1. В отчете должен быть представлен аналогичный график для параметров по вариантам.

График сопровождаем подписями осей, легендой, названием (как на примере). Кривые для разных значений должны быть покрашены разным цветом. **Отсутствие подписей к осям или плохое оформление приведет к отклонению отчета.**

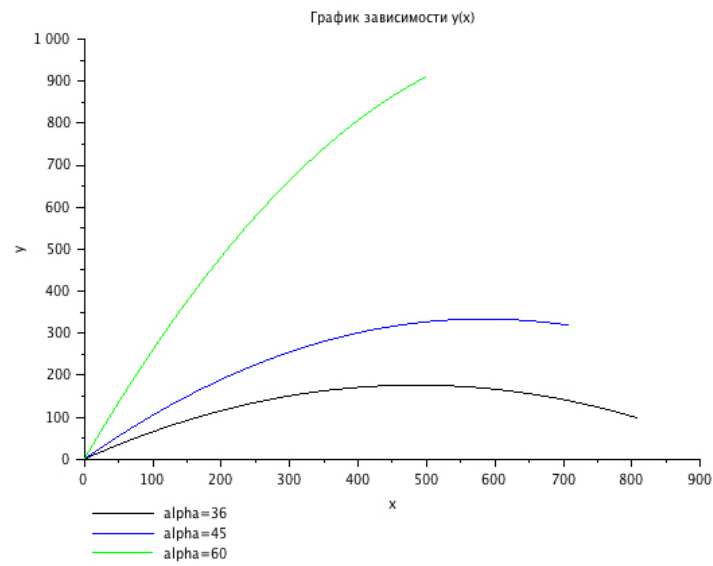


Рис. 1: Пример выполнения задания 1 при $y_0 = 0\text{ м}$; $\alpha_1 = 36^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ$, $v_0=100\text{ м/с}$.

Таблица 1: Варианты к заданию 1.

Вариант	y_0 , м	α , °	$t_0 = t_{min}$, с; t_{max} , с	v_0 , м/с
1	0	15, 25, 35	0, 15	100
2	10	25, 36, 42	0, 20	150
3	17	20, 30, 60	10, 20	120
4	39	15, 16, 40	5, 15	140
5	5	25, 30, 45	20, 30	80
6	19	5, 30, 68	0, 10	130
7	42	25, 40, 47	0, 10	170
8	11	15, 36, 65	5, 15	200
9	33	10, 36, 60	5, 20	190
10	13	25, 30, 45	7, 37	90
11	0	25, 36, 42	7, 17	100
12	0	20, 36, 46	0, 10	110
13	10	5, 36, 62	5, 15	180
14	15	15, 36, 52	10, 20	150
15	30	25, 30, 50	0, 10	85
16	20	25, 36, 42	0, 15	95

Задание 2. Моделирование колебательного движения на примере математического маятника.

Если тело совершает свободные незатухающие колебания, то его координата с течением времени изменяется по закону косинуса или синуса:

$$x = x_{min} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (4)$$

где x_{max} - амплитуда, $(\omega_0 t + \varphi)$ - фаза колебаний, φ - начальная фаза, ω_0 - собственная циклическая (круговая) частота колебаний. Скорость (первая производная координаты по времени) и ускорение (вторая производная координаты по времени) при этом также будут изменяться по гармоническому закону:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = x_{max} \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{max} \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (5)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = x'' = -x_{max} \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_{max} \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi + \pi); \quad (6)$$

Для преобразования выражений мы воспользовались формулами приведения. Отсюда видно, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$, а ускорение - на π , т.е. находится в противофазе со смещением.

Одной из самых простых и распространенных моделей колебательных систем является математический маятник: материальная точка массы m , подвешенная на нерастяжимой нити длиной L и совершающая колебания в вертикальной плоскости. Круговая частота колебаний в этом случае принимается равной

$$\omega_0 = \sqrt{g/L}, \quad (7)$$

период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{L/g}$.

Примечательно, что в случае свободных колебаний круговая частота и период колебаний определяются свойствами самой системы и не зависят от начальных условий (начального смещения или, что то же самое, начальной фазы).

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы построить графики зависимости $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ и проследить за их изменением при изменении параметров системы. Введем начальные параметры $x_{max}=0.3$ м и $x_{max}=0.2$ м, $L=1$ м и $L=2$ м, $t_{max}=10$ с, $\varphi=30^\circ$ и $\varphi=60^\circ$. Кроме того зададим ускорение свободного падения $g \approx 9.80665$ м/с². Произвести

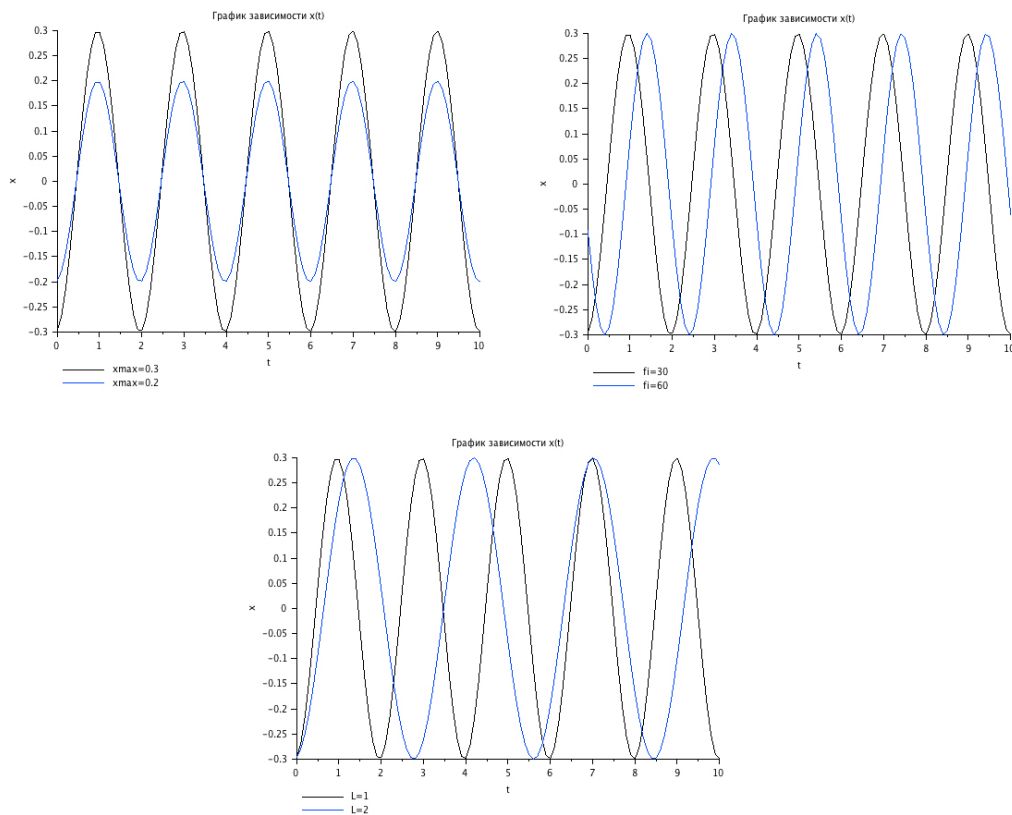


Рис. 2: Пример выполнения задания 2 при разных заданных параметрах.

пересчет начальной фазы из градусной меры в радианы (тригонометрические функции, используемые при расчетах координаты, скорости и ускорения, вычисляют значение угла, заданного в радианах).

Построим график $x(t)$ при двух разных значениях $x_{\max}$ (остальные параметры: $L=1$ м, $t_{\max}=10$ с, $\varphi=30^\circ$) (Рис. 2 а), график $x(t)$ при двух разных значениях φ (остальные параметры: $x_{\max}=0.3$ м, $L=1$ м, $t_{\max}=10$ с) (Рис. 2 б) и график $x(t)$ при двух разных значениях L (остальные параметры: $x_{\max}=0.3$ м, $t_{\max}=10$ с, $\varphi=30^\circ$) (Рис. 2в). Посмотрим как изменились кривые.

По результатам расчетов необходимо построить по три графика для $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ с разными параметрами $x_{\max}$, L , $t_{\max}$ и φ , как в примере. Всего в отчете будет 9 графиков на каждом из которых по две линии. Графики сопровождаем легендой и подписями осей.

Таблица 2: Варианты к заданию 2. Во всех вариантах $t=[0:0.1:10]$.

Вариант	x_{max} , м	L , м	φ
1	0.1, 0.3	1, 3	20, 30
2	0.1, 0.15	1, 2	20, 60
3	0.1, 0.2	1, 4	20, 40
4	0.15, 0.3	1, 3	20, 50
5	0.13, 0.23	1, 2	10, 30
6	0.3, 0.5	1, 3	10, 20
7	0.3, 0.6	1, 4	10, 40
8	0.4, 0.6	1.5, 3	10, 35
9	0.4, 0.5	1, 3.5	30, 60
10	0.1, 0.4	1.5, 3.5	5, 30
11	0.1, 0.35	1.5, 2.5	5, 60
12	0.15, 0.35	0.5, 3	20, 60
13	0.1, 0.2	0.5, 2	20, 30
14	0.1, 0.3	1, 3	10, 30
15	0.15, 0.3	1, 2	5, 40
16	0.15, 0.4	2, 4	2, 34

Литература

Задания были адаптированы из

Богуславский А.А., Щеглова И.Ю. Лабораторный практикум по курсу "Моделирование физических процессов": Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета. – Коломна: КГПИ, 2002 г. – 88 стр.