Лабораторная работа № 5.

Решение дифференциального уравнения второго порядка численным методом. Колебания пружинного маятника.

Рассматривая колебания математического маятника (см. *Лабораторная работа № 3*), мы пользовались готовыми формулами, позволяющими рассчитывать смещение, скорость и координату тела в любой момент времени.

Опишем количественно процесс колебаний тела под действием силы упругости (пружинный маятник). Аналогично можно также рассмотреть и вопрос о колебаниях шарика, подвешенного на нити (математический маятник).

Пусть груз массы m, подвешенный на пружине жесткости k, совершает колебания в горизонтальной плоскости под действием только силы упругости. Затуханием колебаний пренебрегаем.

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{1}$$

где m - масса тела, $\vec{F}$ - равнодействующая всех сил, приложенных к телу, $\vec{a}$ - ускорение, сообщаемое этой силой. Запишем это уравнение для шарика, подвешенного на пружине и движущегося прямолинейно вдоль горизонтальной оси. Ось Ox направим вправо, и начало отсчета координат совместим с положением равновесия шарика. Поскольку мы решили пренебречь затуханием колебаний ($\vec{F}_{тр} = 0$), можно считать, что на тело действует только сила упругости $\vec{F} = \vec{F}_{упр}$. Именно она и сообщает телу ускорение.

В проекции на выбранное направление уравнение движения перепишется в виде:

$$ma_x = F_x, \tag{2}$$

где a_x - проекция ускорения на ось Ox, F_x - проекция силы упругости на ту же ось. Эта проекция прямо пропорциональна смещению тела из положения равновесия, причем проекция силы и координата имеют противоположные знаки (т.к. сила упругости всегда противоположна смещению тела из положения равновесия): $F_x = -kx$, где x - координата тела (смещение). Следовательно, уравнение (2) принимает вид:

$$ma_x = -kx. \tag{3}$$

Это и есть *уравнение движения шарика под действием силы упругости*.

Перепишем его в другом виде. Выразим проекцию ускорения:

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

и учтем, что проекция ускорения на ось Ox есть не что иное, как вторая производная координаты x по времени. Следовательно:

$$x'' = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x \tag{4}$$

или

$$x'' = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_o^2 x, \tag{4, a}$$

где величина $\omega_o = \sqrt{k/m}$ носит название *собственной циклической* или *круговой частоты колебательной системы*.

Таким образом, уравнение колебаний маятника имеет вид:

$$x'' + \omega_o^2 x = 0\,.$$

Точное решение этого уравнения имеет вид:

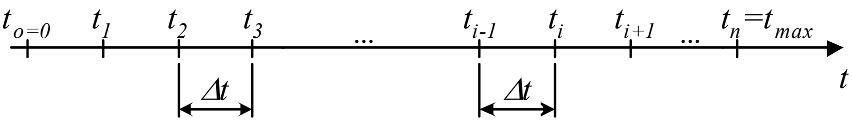
$$\begin{cases} x = x_{\max}\sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o); \\ \mathrm{v}_x = \omega_o \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi_o) = \omega_o \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o + \dfrac{\pi}{2}); \\ a_x = -\omega_o^2 \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o) = \omega_o^2 \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o + \pi). \end{cases} \qquad (*)$$

Эти формулы позволяют найти величины x, v_x, a_x в любой момент времени. Они были получены в математическом анализе путем решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (4, а). Поскольку движение тела происходит под действием переменной силы (а, следовательно, не является равноускоренным), задача эта крайне сложна.

Для решения таких задач используют *численный метод*, который является *приближенным*, но при определенных условиях позволяет получить достаточно хорошие результаты. Значения координаты и скорости, которые будут получаться в результате этих вычислений, отличаются от истинных, полученных при вычислении по точным формулам.

Рассмотрим сущность так называемого <u>*метода половинного интервала*</u>.

1. Выбирается промежуток времени $t_{\min} \div t_{\max}$ (как правило, $t_{\min} = 0$), который разбивают на n одинаковых подинтервалов $\Delta t = \dfrac{t_{\max} - t_{\min}}{n}$. Изобразим это разбиение на числовой оси (оси времени).



Количество таких подинтервалов выбирается произвольно. Приближение на этом шаге состоит в том, что движение на каждом из них считается равноускоренным. Нетрудно видеть, что в этом случае именно величина Δt будет определять точность наших вычислений: чем меньше этот интервал, тем меньше будут отличаться искомые значения от истинных.

Кроме того, интервал Δt, называемый также ***шагом программы***, можно выбрать произвольно, не указывая промежуток времени $t_{\min} \div t_{\max}$.

2. Перейдем теперь от точного уравнения (4) к приближенному равенству, воспользовавшись определением производной функции $x(t)$ в точке:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}\,. \qquad (5)$$

В (5) $\Delta t = t_1 - t_o = t_2 - t_1 = \ldots = t_n - t_{n-1}$ В общем случае можно записать $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, где индекс i пробегает все значения от 0 до n (i=0, 1, 2, ..., n). Аналогично: $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Учитывая, что $x' = \mathrm{v}_x$ и $x'' = \mathrm{v}'_x$, распишем по тому же принципу и вторую производную координаты по времени:

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) также видно, что чем меньше величина интервалов, на которые мы разбиваем выбранный промежуток времени (т.е. чем больше таких интервалов), тем точнее приближение. Таким образом, *переход от строго равенства к приближенному сводится к переходу от бесконечно малых приращений к конечным в определении производной*.

3. Итак, сущность метода половинного интервала состоит в том, что:
1) *значения скорости рассчитываются в середине каждого интервала* Δt, т.е. в моменты времени

$$t_{1/2} = (t_1 - t_o)/2 = \Delta t/2,$$
$$t_{3/2} = (t_2 - t_1)/2 = 3 \cdot \Delta t/2,$$
$$\ldots$$
$$t_{i+1/2} = (t_{i+1} - t_i)/2 = (2i+1) \cdot \Delta t/2,$$
$$\ldots$$
$$t_{n-1/2} = (t_n - t_{n-1})/2 = (2n-1) \cdot \Delta t/2,$$

по формуле, которую можно получить, подставив (6) в (4): $\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx -\dfrac{k}{m} x$;

2) *значения координаты вычисляются в конце каждого интервала времени*, т.е. в точках разбиения: $t_1, t_2, ..., t_{i-1}, t_i, ..., t_n$ оси времени по формуле (5). Таким образом, мы получаем, что точки, в которых вычисляются значения координаты и скорости, сдвинуты относительно друг друга на половину интервала, т.е. на величину $\Delta t/2$. Сами же значения x и v_x вычисляют через интервал Δt.

Тогда значение проекции скорости в середине первого интервала найдем из условия:

$$\frac{(v_x)_{1/2} - (v_x)_o}{(\Delta t/2)} \approx -\frac{k}{m} x_o,$$

где индексы у координаты и скорости обозначают момент времени, в который они вычисляются, а появление в знаменателе вместо интервала Δt его половины ($\Delta t/2$) объясняется тем, что моменты времени t_o и $t_{1/2}$ отстоят друг от друга на величину, равную половине интервала Δt, следовательно

$$(v_x)_{1/2} \approx (v_x)_o - \frac{k}{m} x_o \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

В следующие моменты времени:

$$(v_x)_{3/2} \approx (v_x)_{1/2} - \frac{k}{m} x_1 \cdot \Delta t;$$

$$(v_x)_{5/2} \approx (v_x)_{3/2} - \frac{k}{m} x_2 \cdot \Delta t;$$

$$\ldots$$

$$(v_x)_{i+1/2} \approx (v_x)_{i-1/2} - \frac{k}{m} x_i \cdot \Delta t; \ \ldots$$

Таким образом, скорость тела в некоторый момент времени определяется через известные значения координаты и скорости в предыдущие моменты времени.

Координату тела в момент времени t_1 найдем из условия: $x' = \mathrm{v}_x \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Распишем числитель: $(\mathrm{v}_x)_{1/2} \approx \dfrac{x_1 - x_o}{\Delta t}$, откуда

$$x_1 \approx x_o + (\mathrm{v}_x)_{1/2} \cdot \Delta t .$$

В следующие моменты времени

$$x_2 \approx x_1 + (\mathrm{v}_x)_{3/2} \cdot \Delta t ;$$
$$x_3 \approx x_2 + (\mathrm{v}_x)_{5/2} \cdot \Delta t ;$$
$$\ldots$$
$$x_{i+1} \approx x_i + (\mathrm{v}_x)_{i+1/2} \cdot \Delta t$$
$$\ldots$$

Обобщая все выше сказанное, можно записать основные уравнения, представляющие собой решение дифференциального уравнения колебаний:

$$\begin{cases} (\mathrm{v}_x)_{1/2} \approx (\mathrm{v}_x)_o - \dfrac{k}{m} x_o \cdot \dfrac{\Delta t}{2}; \\ (\mathrm{v}_x)_{i+1/2} \approx (\mathrm{v}_x)_{i-1/2} - \dfrac{k}{m} x_i \cdot \Delta t; \\ x_{i+1} \approx x_i + (\mathrm{v}_x)_{i+1/2} \cdot \Delta t, \end{cases} \tag{7}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Эти формулы позволят составить таблицу данных для построения графиков зависимости $x(t)$ и $\mathrm{v}(t)$.

Последовательность вычислений по методу половинного интервала можно выразить в виде таблицы:

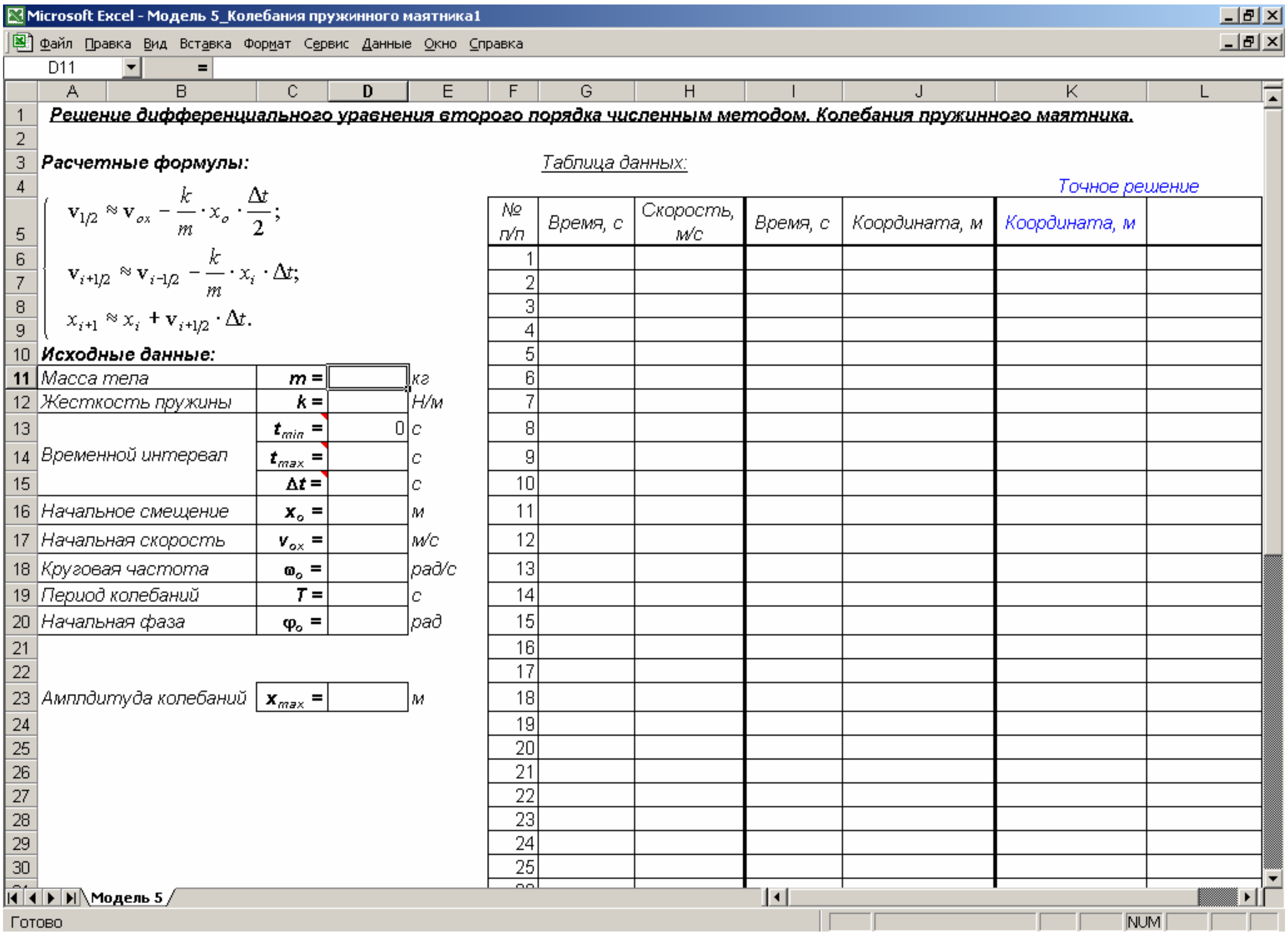
Время	*Координата*	*Скорость*	
t_o	y_o	v_o	- начальные данные
$t_{1/2}$		$\mathrm{v}_{1/2}$	
t_1	y_1		
$t_{3/2}$		$\mathrm{v}_{3/2}$	
t_2	y_2		
$t_{5/2}$		$\mathrm{v}_{5/2}$	
…	…	…	
t_i	y_i		
$t_{i+1/2}$		$\mathrm{v}_{i+1/2}$	
…	…	…	

Обратите внимание, что координата тела в любой момент времени t_i вычисляется по общей формуле, тогда как скорость в середине первого интервала определяется по отдельной (*промежуточной*) формуле. В дальнейших расчетах эта формула не используется.

Как известно, многие процессы в физике описываются дифференциальными уравнениями, для которых невозможно найти точное решение. Поэтому описанный выше алгоритм решения дифференциального уравнения может быть положен в основу общей схемы решения подобных уравнений.

Загрузка файла таблицы.

1. Запустить *Excel.*
2. Открыть шаблон *Модель 5_Колебания пружинного маятника.xlt.*



Проанализировать расчетные формулы, выделить *исходные данные*, *переменные* и *постоянные* величины.

Заполнение таблицы.

1. Занести *исходные числовые данные*

$$m = 1\ \textit{кг},\ k = 5\ \textit{Н/м},\ t_{\max} = 10\ \textit{с},\ \mathrm{v}_o = 3\ \textit{м/с},\ \ x_o = 0\ \text{м}$$

в следующие ячейки:

1) массу тела – в D11;
2) жесткость пружины – в D12;
3) конечный момент времени – в D14;

4) начальное смещение – в D16;
5) начальную скорость – в D17.
Начальный момент времени при решении уравнений по методу половинного интервала *выбирают равным нулю*: $t_o = 0c$ (ячейка D13).

2. Ввести формулы, позволяющие рассчитать интервал времени Δt (шаг программы), собственную циклическую частоту и период колебаний в ячейки D15 (количество подинтервалов *n* определить по *Таблице данных*), D18 и D19.

3. Заполнить *Таблицу данных* (*Время - Скорость; Время - Координата*).

1) Столбцы **G** и **I** содержат значения времени. Введение двух колонок *Время* необходимо потому, что вычисление скорости и координаты проводится в разные моменты времени. Так, в ячейки G6 и I6 копируется начальный момент времени (ячейка D13), после чего в ячейку I7 заносится формула для вычисления момента времени t_1, которая сразу копируется в нижележащий диапазон ячеек; а в ячейку G7 вводится промежуточная формула для вычисления момента $t_{1/2}$, отстоящего от начального на величину $\Delta t/2$. Дальнейшее изменение времени в колонке **G** также должно происходить через интервал Δt.

2) В столбцах **H** и **J** содержатся значения скорости и координаты. Заполнение этих столбцов проводится аналогично. Это значит, что при заполнении колонки *Скорость* в ячейку H7 вводится промежуточная формула, вычисляющая скорость в середине первого интервала, т.е. через интервал $\Delta t/2$ после начала отсчета времени. Дальнейшее вычисление скорости ведется по общей формуле через шаг Δt. В ячейку же J7 вводится общая формула для вычисления координаты в соответствующие моменты времени, которая затем копируется в нижележащие ячейки.

Обратите внимание на то, что в вычислениях скорости и координаты ***не используются значения времени*** из колонок *Время*! Они нужны только для построения графиков.
Примечание: При составлении формул не забывайте использовать абсолютные ссылки для *постоянных* величин.

4. Изменить имя листа, содержащего таблицу (**Модель 5**), например, на **Решение уравнения колебаний.**

Построение графиков.

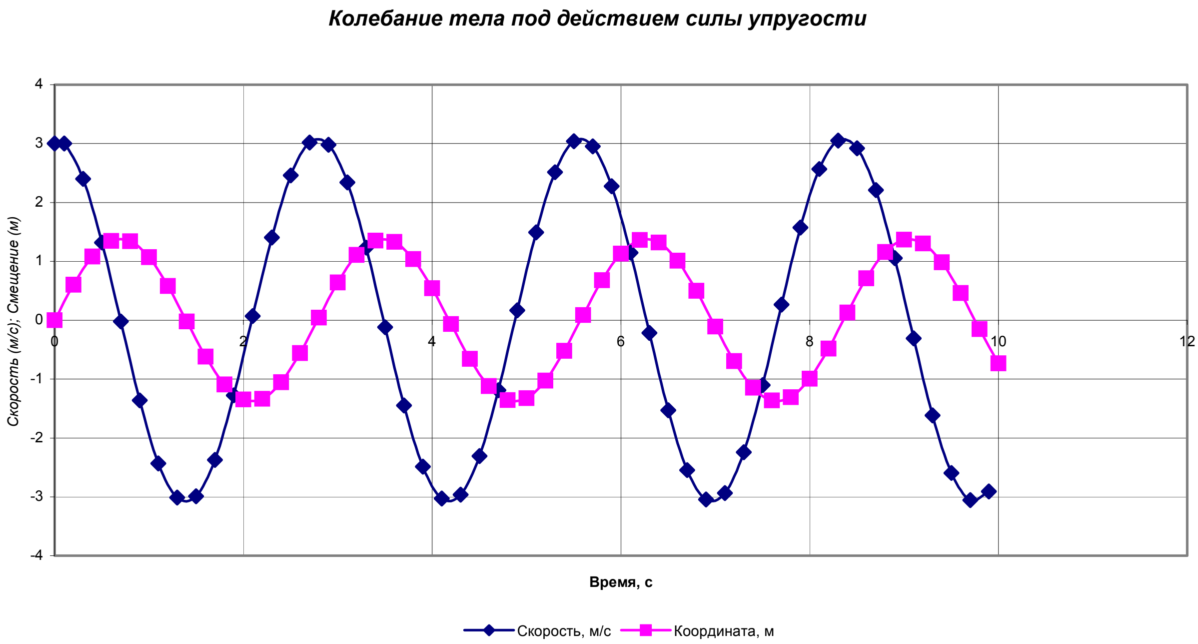
По результатам расчетов необходимо построить два графика: $x(t)$ и $v(t)$. Поскольку во всех случаях по оси *Ox* откладывается одна и та же величина (время), обе зависимости можно представить в одной системе координат.
Основные требования к графику:
- вид диаграммы – *Точечная,* или *Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями*;
- имя рядов данных: *Скорость, м/с* и *Координата, м* (вводится в соответствующее поле с клавиатуры или в виде ссылки на соответствующие ячейки *Таблицы данных*);
- название диаграммы и наименование осей координат с указанием единиц измерения величин, откладываемых по этим осям, задать в виде:

"*Название диаграммы*" – Колебание тела под действием силы упругости;

"*Ось X* (*категорий*)" – Время t, с;

"*Ось Y* (*значений*)" – Координата (м); Скорость (м/с);

- включить основные линии сетки по обеим осям;
- вывести легенду и указать ее размещение на диаграмме;
- расположить диаграмму на отдельном листе.



Задание:

1. Получить самостоятельно формулу для вычисления ускорения (пользуясь при этом только определением ускорения и введенным упрощением, что движение между двумя соседними моментами времени можно считать равноускоренным), провести расчет в одном из столбцов (**M** или **N**) и построить график зависимости ускорения от времени на той же диаграмме.

2. Изменяя массу тела и жесткость пружины, проследить за изменением величин, характеризующих колебательный процесс: круговой частоты, периода, амплитуды координаты и скорости.

3. Сравнить графики колебаний, полученные в результате вычислений по приближенным и точным формулам, для чего в столбце **K** провести расчет координаты по формуле:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o)$$

в те же моменты времени из столбца **I**, что и координата в столбце **J**.

Для этого необходимо провести ряд дополнительных вычислений, т.к. для определения координаты согласно приведенному уравнению нужно знать: 1) амплитуду колебаний $x_{\max}$; 2) циклическую частоту ω_o и 3) начальную фазу φ_o.

1) Циклическая частота колебаний - ячейка D18.

2) Амплитуда - это максимальное значение, которое принимает переменная *x* (координата) в столбце **J**. Поскольку это значение должно входить во все

формулы столбца **K**, удобно, если в формуле оно будет *автоматически изменяться* при изменении параметров системы. Это означает, что формулы должны содержать *не числовое значение амплитуды*, а ссылку на ячейку, в которой это значение находится (в используемом шаблоне таблицы – это ячейка D23). Определение максимального значения проводят с помощью встроенной функции **МАКС()**, где в качестве аргумента необходимо использовать блок ячеек J6:J56, содержащий значения координаты. Функция находится в категории *Статистические*.

3) Начальная фаза φ_o колебаний находится из следующих соображений. В таблице исходных данных задано начальное смещение x_o, т.е. координата в момент времени $t_o = 0$. Фаза колебаний в этот момент $\varphi = \varphi_o$ и смещение: $x_o = x_{\max} \sin \varphi_o$, откуда $\varphi_o = \arcsin \dfrac{x_o}{x_{\max}}$. Начальная фаза рассчитывается в ячейке D20.

4) Построить график зависимости $x^{теор}(t)$ на имеющейся диаграмме.

4. Изменяя $t_{\max}$ (а, следовательно, и интервал времени Δt) при заданных параметрах k, *m,* x_o и v_{ox}, проследить за изменением точности вычислений по приближенным формулам, сравнивая графики колебаний. Таким же образом можно определить и границы применимости данной модели.

5. Добавить в таблицу новую колонку "*Скорость, м/с"* в столбце **L** и провести расчет скорости колеблющегося тела по формуле (*) (точное решение), пользуясь планом, изложенным в *задании 3*. Построить график зависимости $v_x^{теор}(t)$.

6. Задать цвет шрифта различных рядов данных построенной таблицы в соответствии с цветом соответствующих диаграмм.

7. Изменить вид диаграмм на *Точечная диаграмма со значениями*, *соединенными сглаживающими линиями без маркеров.* Добавить в таблицу исходных данных контрольные точки для заданного момента времени и вывести их на всех графиках.

Сохранение данных в файле.

Сохранить данные в файле *Лабораторная работа 5.xls*.

Лабораторная работа № 6-7.

Обработка результатов измерений и моделирование линейной зависимости двух взаимосвязанных величин.

Загрузка файла таблицы.

1. Запустить *Excel.*
2. Открыть шаблон *Модель 6-7_Обработка результатов измерений.xlt.*

Открытый шаблон содержит два листа: **Модель 6** и **Модель 7**. На первом